8. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

План:

1. Определение производной

2. Экономический смысл производной: предельные величины в экономике, эластичность функции (относительная производная).

3. Дифференцируемость и дифференциал функции

4. Геометрический смысл производной и дифференциала

5. Правила вычисления производных и дифференциалов

6. Производные и дифференциалы высших порядков

Ключевые слова исловосочетания:

Производная, предельные (маржинальные) величины, эластичность функции (относительная производная), дифференцируемость функции, дифференциал функции

1. Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и пусть существует конечный предел отношения

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

при $\Delta x \to 0$. Тогда этот предел называется **производной функции** $f(x)$ **в точке** x_0 и обозначается $f'(x_0)$, $f'_x(x_0)$, $y'_x(x_0)$ или $y'(x_0)$, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Согласно определению производная функции $f(x)$ в точке x_0 есть предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x \to 0$, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Если в некотрой точке x_0

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty \quad (+\infty,\ -\infty)$$

и функции $f(x)$ непрерывеа в точке x_0, то говорят о наличии у функции в точке x_0 **«бесконечной производной»** $f'(x_0)=\infty$ $(+\infty,\ -\infty)$.

В случае, когда $f'(x_0)=+\infty$ и $f'(x_0)=-\infty$ говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $\boldsymbol{x_0}$ бесконечную производную (иногда добавляют: *определенного знака*).

Примеры

1. Функция $f(x)=x^2$ имеет конечную производную в каждой точке $x\in R^1$. Действительно, при любом $x\in R^1$ имеем

$$f'(X)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cdot(\Delta x)+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.\ \blacktriangle$$

2. Функция $f(x)=\sqrt[3]{x}$ имеет в точке $x_0=0$ бесконечную производную. Действительно,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{0+\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}=+\infty$$

Покажем теперь случай, когда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$ но, не выполняется ни одно из условий $f'(x_0)=+\infty$ и $f'(x_0)=-\infty$. В этом случае говорят, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *не является бесконечностью определенного знака.* Это имеет место, если

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty,\ \text{а}\ \lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty.\ \blacktriangle$$

3. Этим свойством обладает функция $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{|x|}}$ (рис. 1) в точке $\boldsymbol{x_0=0}$**,** так как $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=+\infty$, а $f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=-\infty$. ▲

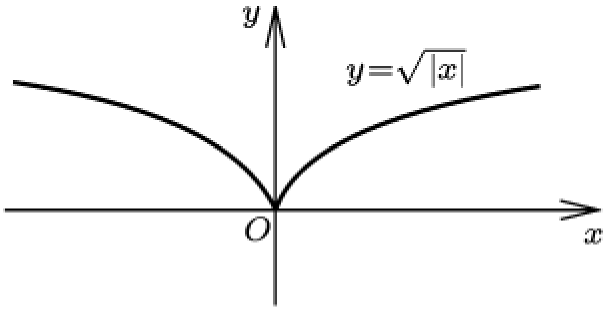

Рис. 1

Конечные или бесконечные пределы

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\quad \text{и}\quad f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

называют сооттственно **левой и правой производными** функции $y=f(x)$ в точке x_0.

Теорема 1. Функция $f(x)$ в точке x_0 производную $f'(x_0)$ тогда только тогда, когда односторонние производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ существуют и совпадают, т.е.

$$\boldsymbol{f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)}.$$

Пример 4. Функции $f(x) = |x|$ в не имеет производной в точке $x_0 = 0$, хотя в этой точке существуют конечные односторонние производные. Действительно, поскольку $\Delta y = |\Delta x|$ и поэтому

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$ ▲

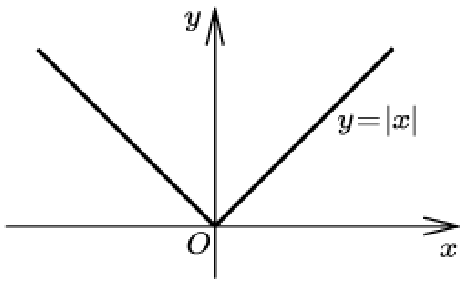

Рис. 2

Замечание. Так как $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ для функции $f(x) = |x|$, то непрерывная в точке $x_0 = 0$ функция $y = |x|$ не имеет производной в этой точке. Этот пример показывает, что из непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 не следует существование ее производной в данной точке.

Упражнение. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{1}{x}, & \textit{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \textit{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

не имеет односторонних производных при $\boldsymbol{x_0} = 0$.►

Теорема 2. Функция $y = f(x)$ имеющая производную в точке x_0, непрерывна в этой точке.

Доказательство. Из равенства (4) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon(\Delta x), \qquad (3)$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. А из (3) получаем

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \varepsilon(\Delta x). \tag{4}$$

Если $\Delta x \to 0$, то правая часть равенства (4) стремится к нулю, и поэтому $\Delta y \to 0$. Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. ■

Операция вычисления производной функции **называется дифференцированием.**

Ниже вычислим производные некоторых элементарных функций

Пример 5. Доказать, что функции $y = C$, $y = x^n$ $(n \in \mathrm{N})$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x$ имеют производные в каждой точке $x \in R^1$, и найти эти производные.

Решение

а) Если $y = C$, C - постоянная, то $\Delta y = C - C = 0$ и поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, т.е.

$$C' = 0. \tag{5}$$

б) Если $y = x^n$, где $n \in \mathrm{N}$, то

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n =$$
$$= x^n + C_n^1 x^{n-1}(\Delta x) + C_n^2 x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + C_n^{n-1} x(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n =$$
$$= C_n^1 x^{n-1}(\Delta x) + C_n^2 x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + C_n^{n-1} x(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n,$$

откуда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1}$, т.е.

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}, \qquad n \in \mathrm{N}. \tag{6}$$

в) Если $y = \sin x$, то $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$, откуда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$. Так как $\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x$ при $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции $\cos \boldsymbol{x}$, а $\dfrac{\sin t}{t} \to 1$ при $\boldsymbol{t} \to 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$, т.е.

$$(\sin \boldsymbol{x})' = \cos \boldsymbol{x}. \tag{7}$$

г) Если $\boldsymbol{y} = \cos \boldsymbol{x}$, то $\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\sin\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$, откуда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x$, т.е.

$$(\cos \boldsymbol{x})' = -\sin \boldsymbol{x}. \qquad (8)$$

д) Если $y = a^x$, то $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$, откуда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to a^x \ln a$ при $\Delta x \to 0$, так как $\dfrac{a^t - 1}{t} \to \ln a$ при $t \to 0$ в силу непрерывности функции $\cos \boldsymbol{x}$, а $\dfrac{\sin t}{t} \to 1$ при $t \to 0$.

Таким образом, если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$, т.е. $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$(a^x)' = a^x \ln a. \qquad (9)$$

Из формулы (9) при $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}$ получаем

$$e' = e^x. \ \blacktriangle \qquad (10)$$

Замечание. Согласно формуле (10) производная показательной функции с основанием e совпадает с самой функцией. Этим объясняется тот факт, что в математическом анализе и его приложениях в качестве основания степени и основания логарифмов обычно используют число e.

Пример 6. Найти производную функции $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$).

Решение. Если $\boldsymbol{y} = \log_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{x}$, то

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a(x) = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right), \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}} \cdot \frac{1}{x},$$

откуда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{x \ln a}$, так как $\dfrac{\log_a(1+t)}{t} \to \log_a e = \dfrac{1}{\ln a}$ при $t \to 0$.

Итак, если $\boldsymbol{a} > 0$, $\boldsymbol{a} \neq 1$, $\boldsymbol{x} > 0$, то

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \qquad (11)$$

Из формулы (11) при $a = e$ получаем

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \ \blacktriangle \qquad (12)$$

Теорема 3. Функция $y = f(x)$ имеющая производную в точке x_0, непрерывна в этой точке.

Доказательство. Из равенства (4) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon(\Delta x), \qquad (13)$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. А из (13) получаем

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \varepsilon(\Delta x). \qquad (14)$$

Если $\Delta x \to 0$, то правая часть равенства (14) стремится к нулю, и поэтому $\Delta y \to 0$. Следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. ■

2. Экономический смысл производной

Экономический смысл производной поясним на примерах.

2.1 Предельные величины в экономике. **Издержки производства** $\boldsymbol{K}$ однородной продукции есть функция количества продукции $\boldsymbol{x}$. Поэтому можно записать:

$$K = K(x)$$

Предположим, что количество продукции увеличивается на Δx. Продукции $x + \Delta x$ соответствуют издержки производства продукции

$$K(x + \Delta x)$$

Следовательно, приращению количества продукции $\boldsymbol{\Delta x}$ соответствует приращение издержек производства продукции

$$\Delta K = K(x + \Delta x) - K(x)$$

Среднее приращение издержек производства есть

$$\frac{\Delta K}{\Delta x}.$$

Это есть приращение издержек производства на единицу приращения количества продукции.

Предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x). \qquad (*)$$

называется **предельными издержками производства.**

Аналогично, если мы обозначим через $U(x)$ выручку от продажи x единиц товара.

Предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = U'(x). \qquad (**)$$

мы будем называть **предельной выручкой.**

Пример 7. Издержки производства K зависят от объема продукции x по формуле

$$K = 100x - \frac{1}{30}x^3.$$

Определить предельные издержки, если объем производства составляет: а) 5 единиц; б) 10 единиц продукции.

Решение. Имеем:

$$K' = 100 - \frac{1}{10}x^2,$$

откуда

$$K'(5) = 100 - \frac{1}{10}5^2 = 97{,}5; \quad K'(10) = 100 - \frac{1}{10}10^2 = 90.$$

Это означает, что при объеме производства в 5 единиц продукции издержки по изготовлению следующей (шестой) единицы продукции составят 97,5; при объеме производства в 10 единиц они составят 90. ▲

Пример 8. Функция цен спроса на какой-либо товар определяется формулой

$$p = 10 - 2x,$$

где x - спрос, p - цена.

Выручка от продажи товара есть

$$u = x(10 - 2x) = 10x - 2x^2,$$

откуда $u' = 10 - 4x^2$. Если, например, $x = 2$, то $u'(2) = 2$. Это означает, что если спрос возрастет с 2 до 3 единиц, то выручка возрастет приблизительно на 2 единицы. ▲

Упражнения

1. Зависимость между издержками продукции y и объемом выпускаемой продукции x на предприятии выражается функцией $y = 10x + 50$. Определить предельные издержки при объеме продукции $x = 100$ единиц. ►

2. Зависимость издержек производства одного из предприятий от объема выпускаемой продукции x выражается формулой

$$y(x) = 40x - 0{,}03x^3.$$

Определить средние и предельные издержки при объеме продукции $x = 15$ ден. ед. ►

Как видно,

предельная величина характеризует не состояние (как суммарная или средняя *величины), а процесс, изменение экономического объекта.*

Таким образом,

предельная величина выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса).

Теоретический анализ разнообразных явлений экономики использует ряд других предельных величин кроме, выше рассмотренных. Перечислим некоторые из них: **предельная стоимость, предельный доход, предельная производительность, предельная полезность, предельная склонность к потреблению.** Все эти величины самым тесным образом связаны с понятием производной.

В экономической теории предельные (маржинальные) величины $y'(x)$ принято обозначать через $\mathrm{M}y(x)$. Буква М первая буква английского слова **marginal «маржинальный»** (переводится на русский язык словом предельный»).

Определение предельных величин с помощью понятия производной позволяет использовать математический аппарат для доказательства экономических законов.

Рассмотрим некоторые применения дифференциального исчисления в экономической теории.

Пусть x количество реализованного товара. $R(x)$- функция дохода, $C(x)$ - функция издержек (затрат на производство товара). Вид этих функций зависит от способа производства, оптимизации инфраструктуры и т. п. Обозначим функцию прибыли через $\Pi(x)$. Тогда

$$\Pi(x)=R(x)-C(x).$$

Очевидно, оптимальным уровнем производства является тот, при котором прибыль максимальна, т. е. такое значение выпуска x, при котором функция $\Pi(x)$ имеет максимум. По теореме Ферма в этой точке

$$\Pi'(x)=0.$$

Но $\Pi'(x)=R'(x)-C'(x)$. Поэтому $R'(x)=C'(x)$, т.е. если уровень выпуска x является оптимальным для производителя, то $\mathrm{M}R(x)=\mathrm{M}C(x)$, где $\mathrm{M}R(x)$- предельный доход, а $\mathrm{M}C(x)$ - предельные издержки.

Получили известное в микроэкономике утверждение:

Для того чтобы прибыль была максимальной, необходимо, чтобы предельный доход и предельные издержки были равны.

Использование в конце XIX в. предельных (маржинальных) величин полностью изменило способы анализа и предмет экономической теории. Экономисты для вывода экономических законов стали охотно прибегать к математическим доказательствам. Произошедшие в результате этого изменения были столь значительны, что их впоследствии назвали ***маржиналистской революцией***.

Упражнения

1. Объем продаж видеомагнитофонов задается следующей функцией времени:

$$V(t) = 5000 + 1000t - 100t^2$$

где t-время, измеряемое в месяцах,

V - количество видеомагнитофонов, проданных за месяц.

Найти скорость изменения объема продаж в момент времени:

а) $t = 0$; б) $t = 3$; в) $t = 6$. ▶

2. Население некоторой страны растет по следующему закону:

$$P(t) = 100000(1 + t^2),$$

где время t - измеряется в годах. Найти скорость изменения населения в момент времени:

а) $t = 0$; б) $t = 2$; в) $t = 5$. ▶

3. Эпидемия медленно распространяется среди населения . Число заболевших определяется формулой

$$A(t) = 200(t^{\frac{5}{2}} + t^2)$$

где t - число недель, прошедших с момента начала эпидемии.

Найти скорость изменения числа заболевших в момент времени:

а) $t = 1$; б) $t = 4$; в) $t = 9$. ▶

4. Предположим, что издержки получения питьевой воды заданы формулой

$$C = \frac{10000}{p} - 100.$$

где p - процентное содержание загрязняющих воду примесей.

Найти скорость изменения издержек производства, если примеси составляют 5%.▶

2.2. Эластичность функции (относительная производная). Как уже заметили с помощью производной можно вычислить приращение зависимой переменной, соответствующее приращению независимой переменной. Во многих задачах, особенно экономических, удобнее вычислить процент прироста (относительное приращение) зависимой переменной, соответствующее проценту прироста независимой переменной. Это приводит нас к понятию **эластичности функции (иногда ее называют относительной производной).**

Понятие эластичности было введено Альфредом Маршаллом в связи с анализом функции спроса. Впоследствии это понятие было распространено и на другие функции.

Пусть дана функция $y = f(x)$. Предположим, что приращение независимой переменной x есть Δx.

Эластичностью функции $y = f(x)$ называется следующий предел

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) \qquad (***)$$

Говорят также, что $E_x(y)$ - это *коэффициент эластичноти* y по x.

Из определения эластичности вытекает, что при достаточно малых Δx выполняется приближенное равенство

$$E_x(y) \approx \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right),$$

Замечание. Эластичность $E_x(y)$ - это коэффициент пропорциональности между относительными изменениями величин y по x. Если, например, x увеличится на один процент, то у увеличится (приближенно) на $E_x(y)$ процентов.

Теоретический и практический интерес представляют производственные функции с постоянной (отличной от единицы) эластичностью замещения труда производственными фондами и с постоянной (переменной) отдачей на единицу масштаба производства.

Примерно такого рода функций является функция ***CES (Constant Elasticity of Substitution)***

$$y = C_0 \left[CL^{-p} + (1-C)K^{p} \right]^{-1/p},$$

для которой эластичность замещения равна $\dfrac{1}{1-p} \neq 1$; p, C_0 и C - постоянные.

Примеры

9. Правильное применение знаний о коэффициентах эластичности спроса на товары помогает правительству в оценке последствий введения новых налогов или акцизов.

Пусть x акцизы на некоторое импортное ювелирное изделие, y - спрос на этот товар. Предположим, что государство предполагает повысить акцизы на это изделие на 10%. Если известно, что эластичность спроса составляет $E_x(y) = -0{,}2$, то следует ожидать, что это вызовет снижение спроса на данный товар на $0{,}2 \cdot 10 = 2$ (%) и доходы государства по продаже импортного ювелирного изделия повысятся на 8%. ▲

10. Изучение эластичности важно и для оценки изменения ситуации на рынке товаров и услуг в результате повышения доходов населения. Известно, что для мяса, масла и яиц эластичность спроса относительно доходов населения положительна, а для муки - отрицательна. Это означает, что с ростом дохода спрос на мясо, масло и яйца увеличивается, а на муку - понижается. Обратно, понижение доходов населения приводит к понижению закупок мяса, яиц, масла и увеличению закупок муки. Связано это с тем, что снижение доходов влечет за собой и уменьшение возможности покупки дорогостоящих продуктов. Вместо этих продуктов, например мяса, население покупает более дешевый продукт, т. е. муку или хлеб. ▲

11. Пусть заданы функции спроса y и предложения (количества товаров предлагаемого в единицу времени) z от цены x:

$$y = 10 - x, \qquad z = 3x - 6.$$

Найти:

а) цену равновесия при которой спрос и предложение уравновешиваются;

б) эластичность спроса и предложения для цены равновесия.

Решение

а) Цена равновесия находится из условия $y(x) = z(x)$, или $10 - x = 3x - 6$, откуда $x = 4$;

б) эластичность спроса $E_x(y)$ и предложения $E_x(z)$ находим по формуле (***). Имеем

$$y = 10 - x;$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = 10 - (x + \Delta x) - (10 - x) = -\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{-\Delta x}{10 - x} : \frac{\Delta x}{x} = -\frac{x}{10 - x},$$

откуда

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{x}{10-x}\right)=-\frac{x}{10-x}.$$

Аналогично имеем

$$z=3x-6;$$

$$\Delta z=z(x+\Delta x)-z(x)=3x+3\Delta x-6-(3x-6)=3\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{z}:\frac{\Delta x}{x}=\frac{3\Delta x}{3x-6}:\frac{\Delta x}{x}=\frac{3x}{3x-6},$$

следовательно

$$E_x(z)=\frac{x}{x-2}.$$

Таким образом, при $x=4$ получаем

$$E_x(y)=-\frac{4}{10-4}=-\frac{2}{3},\quad E_x(z)=\frac{4}{4-2}=2.$$

Это означает, что при цене равновесия между спросом и предложением увеличение цены на 1% влечет уменьшение спроса на (2/3)% и возрастание предложения на 2%. ▲

Замечание. Коэффициент эластичности широко используют в исследованиях потребительского спроса на товары в зависимости от цен этих товаров или доходов потребителей. Высокий коэффициент эластичности означает слабую степень удовлетворения потребности; низкий указывает на то, что данная потребность высока.

Упражнения

1. Найти эластичность функции спроса:

а) $\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{x}=100$ в точке $p=50$;

б) $3\boldsymbol{p}+4\boldsymbol{x}=120$ в точках $p=15$ и $p=20$;

в) $\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{p}+4\boldsymbol{x}=40$ в точках $p=2$ и $p=4$.

Как увеличение цены повлияет на выручку? При каких значениях p спрос является эластичным? ►

2. Найти эластичность функции спроса $xp=5$ в точке $p=10$. Как увеличение цены повлияет на выручку? Какой это тип эластичности? ►

3. Для следующих функций спроса найти значения p при которых спрос является эластичным:

а) $2\boldsymbol{p}+3\boldsymbol{x}=12$;

б) $\boldsymbol{x}=50(10-\sqrt{\boldsymbol{p}})$;

в) $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b} \quad (\boldsymbol{a} < 0, \boldsymbol{b} > 0)$. ►

4. Функция спроса имеет вид $\boldsymbol{p} = \sqrt{3600 - \boldsymbol{x}^2}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p = 50$.

б) Посчитать приближенно процентное изменение спроса, если цена выросла на 11%. ►

5. Уравнение спроса имеет вид $\boldsymbol{p} = 20 - 0{,}1\sqrt{\boldsymbol{x}}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p = 18$.

б) Вычислить приближенно процентное изменение спроса, если цена уменьшилась на 2%. ►

6. Уравнение спроса имеет вид $\boldsymbol{p} = 100\sqrt{4 - \boldsymbol{p}}$. Найти эластичность и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет:

а) 150 единиц;

б) 50 единиц. ►

7. Уравнение спроса имеет вид $(\boldsymbol{p} + 1)\sqrt{\boldsymbol{x} + 1} = 100$. Найти эластичность и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет:

а) 24 единицы;

б) 15 единиц. ►

8. Для следующих функций спроса и предложения найти значение налога на единицу товара, максимизирующее доход государства:

а) $\boldsymbol{p} = -3\boldsymbol{x} + 124$, $\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{x} + 14$;

б) $\boldsymbol{p} = 250 - 2\boldsymbol{x}^2$, $\boldsymbol{p} = 700 + 3\boldsymbol{x}$. ►

9. Найти значение налога, максимизирующее доход государства, если функции спроса и предложения имеют вид:

а) $\boldsymbol{p} = 800 - 0{,}5\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{p} = 700 + 2\boldsymbol{x}$;

б) $\boldsymbol{p} = 8200 - 5\boldsymbol{x}^2$, $\boldsymbol{p} = 700 + 20\boldsymbol{x}^2$. ►

3. Дифференцируемость и дифференциал функции

Если функция $y = f(x)$ определена в δ - окрестности точки x_0, а приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x_0 представимо в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x), \tag{15}$$

где $A = A(x_0)$ не зависит от Δx, а $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то функция f называется **дифференцируемой в точке** x_0, а произведение $A \cdot \Delta x$ называется **ее дифференциалом в точке x_0** и обозначается $df(x_0)$ или dy. Таким образом,

$$\Delta y = dy + o(\Delta x), \qquad \text{при} \quad \Delta x \to 0, \tag{16}$$

где

$$dy = A\cdot\Delta x. \tag{17}$$

Отметим, что приращение $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ можно рассматривать только для таких Δx, при которых точка $x_0+\Delta x$ принадлежит области определения функции f, в то время как дифференциал dy определен при любых Δx.

Пример 9. Функция $y = x^2$ дифференцируема при любом x, так как $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\cdot(\Delta x) + (\Delta x)^2 = 2x\cdot(\Delta x) + o(\Delta x)$. При этом $dy = 2x\,dx$. ▲

Теорема 4. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела производную в точке x_0. При этом дифференциал и производная связаны равенством

$$dy = f'(x_0)\cdot\Delta x. \tag{18}$$

Доказательство. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то выполняется условие (19), и поэтому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \varepsilon(\Delta x)$, где $\varepsilon(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, $(\Delta x\neq 0)$, откуда следует, что существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A$, т. е. существует $f'(x_0) = A$.

Обратно, если существует $\boldsymbol{f'(x_0)}$, то справедливо равенство (14), и поэтому выполняется условие (15). Это означает, что функция f дифференцируема в точке $\boldsymbol{x = x_0}$, причем коэффициент $\boldsymbol{A}$ в формулах (15) к (17) равен $f'(x_0)$, и поэтому дифференциал записывается в виде (18).■

Таким образом, существование производной функции в данной точке равносильно дифференцируемости функции в этой точке.

Функцию, имеющую производную в каждой точке интервала (a,b) называют **дифференцируемой на интервале** (a,b).

Если функция f дифференцируема на интервале (a,b) и, кроме того, существуют $f'_+(a)$, и $f'_-(b)$, то функцию f **называют дифференцируемой на отрезке** $[a,b]$.

Замечание. Если $\boldsymbol{f'(x_0)}\neq 0$, то из равенств (20) и (22) следует, что $\boldsymbol{dy}\neq 0$

при $\Delta x \neq 0$ и

$$\Delta y \sim dy, \qquad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

В этом случае говорят, что дифференциал есть **главная линейная часть приращения функции,** так как дифференциал есть линейная функция от Δx и отличается от Δy на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx.

Замечание. Приращение Δx часто обозначают символом dx и называют **дифференциалом независимого переменного.** Поэтому формулу (18) записывают в виде

$$dy = f'(x_0)dx. \qquad (19)$$

По формуле (19) можно найти дифференциал функции, зная ее производную.

Например, $d\sin x = \cos x dx$, $de^x = e^x dx$.

Из формулы (19) получаем

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}. \qquad (20)$$

Согласно формуле (20) производную можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного.

Замечание. Отбрасывая в формуле (15) член $\beta = \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x)$, т. е. заменяя приращение функции ее дифференциалом, получаем приближенное равенство $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$ или

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \qquad (21)$$

Формулу (21) можно использовать для вычисления приближенного значения $f(x_0 + \Delta x)$ при малых Δx, если известны значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$.

Пример 10. Найти с помощью формулы (21) приближенное значение функции $y = \sqrt[4]{x}$ при $x = 90$.

Решение. Полагая в формуле (21) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 81$, $\Delta x = 9$ и учитывая, что $f(x_0) = \sqrt[4]{81} = 3$, $f'(x) = \dfrac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{x^3}}$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{4 \cdot 3^3}$ поручаем $\sqrt[4]{90} \approx 3 + \dfrac{1}{12}$, т.е. $\sqrt[4]{90} \approx 3{,}083$. ▲

4. Геометрический смысл производной и дифференциала

Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$ называют предельное положение секущей MN при произвольном стремлении точки N к

|| точке M по графику функции (или, что то же самое, при $dx \to 0$) (рис. 3).

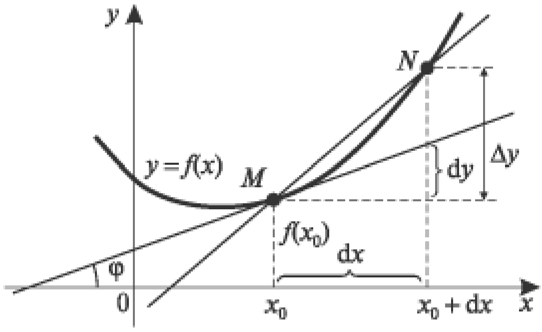

Рис. 3

Значение производной $f'(x_0)$ в точке x_0 определяется *угловым коэффициентом касательной*, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$, т.е. $f'(x_0) = tg\varphi$, где φ - угол между положительным направлением оси Ox и касательной, отсчитываемый против часовой стрелки (см. рис. 3).

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$ имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Если $f'(x_0) = \infty$ $(-\infty, +\infty)$, то касательная к графику непрерывной функции $f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$перпендикулярна оси Ox (вертикальная касательная).

Уравнение такой касательной имеет вид $x = x_0$.

Величина дифференциала dyв точке x_0 равна *приращению ординаты касательной* к графику $f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$ при переходе от точки x_0 к точке $(x_0 + dx)$ (см. рис. 3).

Примеры

11. Написать уравнение касательно к графику функции $f(x) = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$.

Решение

Имеем

$$f(x_0) = \sqrt{4} = 2, \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, уравнение касательной имеет вид $y - 2 = \frac{1}{4}(x-4)$ или $y = \frac{1}{4}x + 1$ (рис. 4). ▲

12. Касательная графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $O(0,0)$будет вертикальной, так как данная функция непрерывна при $x = 0$, а $f'(0) = +\infty$ (рис.5). ▲

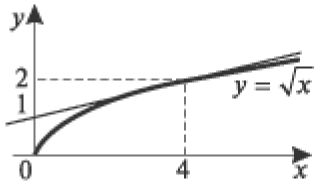

Рис. 4

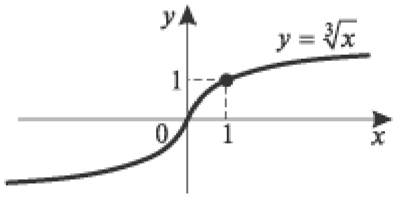

Рис. 5

5. Правила вычисления производных и дифференциалов

5.1. Дифференцирование суммы, произведения и частного. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемые в точке x и пусть k - постоянная. Тогда:

1. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$; $d[f(x) \pm g(x)] = df(x) \pm dg(x)$.

2. $[kf(x)]' = kf'(x)$; $d[kf(x)] = k\,df(x)$.

3. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$; $d(f(x)g(x)) = df(x)g(x) + f(x)dg(x)$.

4. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$; $d\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{df(x)g(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$ $(g(x) \neq 0)$.

Дадим теперь сводку формул для производных элементарных функций.

1) $(C)' = 0, \quad C = const.$

2) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in R^1, \quad x > 0, \qquad (x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in N, \quad x \in R^1$

3) $(a^x)' = \alpha^x \ln a, \quad \alpha > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in R^1, \qquad (e^x)' = e^x, \quad x \in R.^1$

4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0.$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \neq 0.$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0.$

$(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0.$

5) $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in R^1.$

6) $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in R^1.$

7) $(tg\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$

8) $(ctg\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in Z.$

9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1.$

10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1.$

11) $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R^1.$

12) $(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R^1.$

13) $(sh\, x)' = ch \quad x, \quad x \in R^1.$

14) $(ch\, x)' = sh \quad x, \quad x \in R^1.$

15) $(th\, x)' = \dfrac{1}{ch^2 x}, \quad x \in R^1.$

16) $(cth\, x)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}, \quad x \neq 0.$

Пример

13. Вычислить производную функции $y = \dfrac{e^x + 4x^3}{\ln x}$.

Решение

Применения правила и сводку производных, имеем

$$y' = \frac{(e^x + 4x^3)' \ln x - (e^x + 4x^3)(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{(e^x + 12x^2)\ln x - \dfrac{e^x + 4x^3}{x}}{\ln^2 x}. \ ▲$$

14. Для функции $y = a^x arctg\, x$ ее производная

$$y' = (a^x)' arctg\, x + a^x (arctg\, x)' = a^x \cdot \ln a \cdot arctg\, x + \frac{a^x}{1+x^2}. \ ▲$$

5.2. Дифференцирование сложной функции. Если функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u_0 = g(x_0)$, то *сложная функция* $y = \Phi(x) = f(g(x))$ также дифференцируема в точке x_0, причем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \qquad \text{или } \Phi'(x_0) = f'(u_0) g'(x_0)$$

Справедливо равенство

$$dy = \Phi'(x_0)dx = f'(u_0)du,$$

где $du = g'(x_0)dx$, т.е. дифференциал равен произведению производной по некоторой переменной на дифференциал этой переменной независимо от того, является ли эта переменная независимой или функцией другой переменной **(инвариантность формы первого дифференциала).**

Примеры

15. Производная функции $y = 3^{\cos^5 2x}$ равна

$$y' = 3^{\cos^5 2x}\ln 3\left(\cos^5 2x\right)' = 3^{\cos^5 2x}\ln 3\cdot 5\cos^4 2x(\cos 2x)' =$$

$$5\ln 3\cdot 3^{\cos^5 2x}\cos^4 2x(-\sin 2x)(2x)' = -10\ln 3\cdot\sin 2x\cos^4 2x\cdot 3^{\cos^5 2x}. \blacktriangle$$

16. Дифференциал функции $y = tg^4 6x$ равен

$$dy = 4tg^3 6x\,d(tg\,6x) = 4tg^3 6x\frac{1}{\cos^2 6x}d(6x) = \frac{24tg^3 6x}{\cos^2 6x}dx = \frac{24\sin^3 6x}{\cos^5 6x}dx. \quad \blacktriangle$$

17. Вычислить производную функции $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{1+x^2}{1-x}}, \quad (x<1)$.

Решение

Предварительно преобразуем эту функцию к виду

$$y = \frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right) - \frac{1}{4}\ln(1-x).$$

Тогда

$$y' = \frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{-1}{1-x} = \frac{2x+1-x^2}{4(1-x)\left(1+x^2\right)}. \quad \blacktriangle$$

5.3. Логарифмическое дифференцирование. Прием логарифмического дифференцирования используется в том случае, когда функция имеет вид, удобный для логарифмирования, и сводится к следующей схеме:

а) заменяют функцию y на функцию $|\,y\,|$;

б) логарифмируют выражение $|\,y\,|$;

в) находят производную от $\ln|\,y\,|$ $\left(\left(\ln|\,y\,|\right)' = y'/y\right)$;

г) находят y'.

Примеры

18. Для функции $y = (\cos x)^{\sin x}$, $(\cos > 0)$ имеем $|\,y\,| = y$ и, следовательно,

$$\ln y = \sin x\ln(\cos x).$$

Тогда $\dfrac{y'}{y} = \cos x\ln(\cos x) + \sin x\dfrac{-\sin x}{\cos x}$, откуда

$$y' = (\cos x)^{\sin x}\left[\cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right]. \blacktriangle$$

19. Для функции $y = \sqrt[5]{\dfrac{\sin 5x}{1-\sin 5x}}$ имеем

$$\ln|y| = \frac{1}{5}\ln|\sin 5x| - \frac{1}{5}\ln|1-\sin 5x|.$$

Тогда $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{\cos 5x}{\sin 5x}\cdot 5 - \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{-5\cos 5x}{1-\sin 5x} = \dfrac{ctg\, 5x}{1-\sin 5x}$, откуда

$$y' = \sqrt[5]{\frac{\sin 5x}{1-\sin 5x}}\cdot\frac{ctg\, 5x}{1-\sin 5x}. \blacktriangle$$

Упражнения

1. Найти производную показательно-степенной функции $z = u(x)^{v(x)}$, где $u,\ v$ - функции, дифференцируемые в точке x, причем $u(x) > 0$. ►

2. Найти $f'(x),\ g'(x)$, если:

$a)\quad f(x) = x^x;$ $\qquad\qquad$ $б)\quad g(x) = x^{x^x}$. ►

3. Пусть функция f дифференцируема на интервале $(-a,\ a)$. Доказать, что если $f(x)$ - четная функция, то ее производная $f'(x)$ - нечетная функция, а если $f(x)$ - нечетная функция, то $f'(x)$ - четная. ►

6. Производные и дифференциалы высших порядков

Если функции $f(x)$ определена производная $y^{(n-1)}$ порядка $(n-1)$, ***производную*** $y^{(n)}$ ***порядка*** n (при условии ее существования) определяют как производную от производной порядка $(n-1)$, т.е. $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

В частности, $y'' = (y')'$ - производная второго порядка, $y''' = (y'')'$ - производная третьего порядка и т.д. Другие обозначения производных высших порядков: $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, y^{IV}, y''_{xx}, $f^{(n)}(x)$.

При вычислении производных высших порядков используют те же правила, что и для вычисления y'. Например, если $y = e^{x^2}$, то

$$y' = e^{x^2}\cdot 2x,$$

$$y'' = \left(e^{x^2}\right)'\cdot 2x + e^{x^2}(2x)' = e^{x^2}\cdot 2x\cdot 2x + e^{x^2}\cdot 2 = 2e^{x^2}\left(2x^2+1\right).$$

Дифференциалы высших порядков функции $y = f(u)$ последовательно определяют таким образом:

$d^2 y = d(dy)$ - дифференциал второго порядка,

$d^3 y = d(d^2 y)$ - дифференциал третьего порядка, … .

Вообще, $d^n y = d(d^{n-1} y)$ - дифференциал n-го порядка.

При этом если $y = f(u)$ и u независимая переменная или линейная функция $u = kx + b$ переменной x, то

$$d^2 y = y''(du)^2;\ d^3 y = y'''(du)^3;\ \dots;\ d^n y = y^{(n)}(du)^n.$$

Если же $y = f(u)$, где $u = g(x) \neq kx + b$, то $d^2 y = f'''(u)(du)^2 + f'(u)d^2 u$ и т.д. **(свойство инвариантности формы не выполняется).** Например, для функции $y = 3u^5 - 4u^2 + 7$ ее первый дифференциал

$$dy = (15u^4 - 6u)du$$

независимо от того, является ли u независимой переменной или функцией другой переменной. В то же время дифференциал второго порядка будет равен:

$d^2 y = (60u^3 - 8)(du)^2$, если u - независимая переменная;

$d^2 y = (60u^3 - 8)(du)^2 + (15u^4 - 8u)d^2 u$, если u - функция другой переменной.

6.2. Производная обратной функции. Если дифференцируемая функция $y = f(x),\ (a < x < b)$ имеет непрерывную обратную функцию $x - y(u)$ и $y'_x \neq 0$, то существует *производная обратной функции* x'_y и имеет место равенство

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Дифференцируя последнее равенство по y и предполагая существование y''_{xx}, найдем

$$x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^2} x'_y = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}.$$

При соответствующих предположениях аналогично можно определить производные любого порядка обратной функции.

Например, для функции $y = a^x\ (a > 0,\ a \neq 1,\ y > 0)$ обратной является функция $x = \log_a y$. Ее производная

$$x'_y = (\log_a y)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(a^x)'_x} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}.$$

Кроме того, так как $y''_{xx}=a^x(\ln a)^2$, то

$$x''_{yy}=-\frac{a^x(\ln a)^2}{(a^x\ln a)^3}=-\frac{1}{y^2\ln a}.$$

6.3. Производная параметрический заданной функции. Рассмотрим функцию $y=f(x)$. Систему соотношений $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),$ где $\alpha<t<\beta$, называют *параметрическим представлением функции* $y=f(x)$, если $\psi(t)-f((\varphi(t))$ для всех $t\in\,]\alpha,\beta[$.Переменная t называется в этом случае *параметром*.

Если функция $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ - дифференцируемые и $\varphi'(t)\neq 0$, то существует производная y'_x параметрический заданной функции и

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Если, кроме того, существуют y''_{tt} и x''_{tt}, то

$$y''_{xx}=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)_t t'_x=\frac{y''_{tt}x'_t-y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

При соответствующих предположениях аналогично можно определить производные любого порядка параметрический заданной функции.

Например, если функция $y=f(x)$задана параметрический соотношениями $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t\ (-\infty<t<\infty)$, где a и b - положительные постоянные, то $y'_t=3b\sin^2 t\cos t,\ x'_t=-3a\cos^2 t\sin t$. При $t\neq\pi k/2\,(k=0,\pm1,\pm2,\ \dots)$ производная $x'_t\neq 0$. Следовательно, при этих значениях t получаем

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{3b\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t}=-\frac{b}{a}tg\,t.$$

Далее,

$$y''_{xx}=\left(-\frac{b}{a}tg\,t\right)'_x=\left(-\frac{b}{a}tg\,t\right)'_x t'_x=-\frac{b}{a\cos^2 t}\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{b}{3a^2\cos^4 t\sin t}.$$

6.4. Производная неявно заданной функции. Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ задана неявно уравнением $F(x,y)$, то, дифференцируя тождество $F(x,f(x))=0$ по x (как сложную функцию), можно определить $f'(x)$. Дифференцируя выражения $f'(x)$ по x, можно определить $f''(x)$ и т.д.

Например, если функция $y=f(x)$ задана неявно уравнением

$$arctg\, y - y + x = 0,$$

то, дифференцируя по x тождество

$$arctg\ f(x) = f(x) + x = 0,$$

найдем

$$\frac{f'(x)}{1+y^2} - f'(x) + 1 = 0,$$

откуда

$$y' = f'(x) = 1 + y^{-2}.$$

Дифференцируя по x последнее равенство, получаем

$$y'' = f''(x) = 2y^{-3}y' = \frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение производной функции в заданной точке? Как она обозначается?

2. Когда говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную?

3. В каком случае говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную определенного знака?

4. Как вводятся понятия левой и правой производных? Что называют левой (правой) производной функции f в точке x_0 и как ее обозначают?

5. Что называется дифференцированием функции?

6. Верно ли обратная теорема к следующей теореме: Функция $y = f(x)$ имеющая производную в точке x_0, непрерывна в этой точке.

7. Что означает предельные величины в экономике?

8. Что называется предельными издержками производства?

9. Что называется предельной выручкой?

10. Разъясните понятие эластичности функции. Почему иногда ее называют относительной производной?

11. Где широко используется коэффициент эластичности?

12. Дайте определение дифференциала функции в точке x_0. В каком случае функция f называется дифференцируемой в точке x_0?

13. Сформулируйте необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке $\boldsymbol{x}_0$. Каким равенством связаны дифференциал и производная ?

14. Дайте определение дифференцируемой функции на интервале $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

15. Дайте определение дифференцируемой функции на отрезке $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$.

16. Почему говорят, что дифференциал есть главная линейная часть приращения функции?

17. Что называют дифференциалом независимого переменного? Напишите формулу, по которой можно найти дифференциал функции, зная ее производную.

18. Откуда можно получить приближенное равенство $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$ или $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x$, которое используется для вычисления приближенного значения $f(x_0+\Delta x)$ при малых Δx при известных значений $f(x_0)$ и $f'(x_0)$?

19. Объясните геометрический смысл производной и дифференциала.

20. Приведите правила вычисления производных и дифференциалов.

21. Приведите правило дифференцирования обратной функции. Сформулируйте теорему. Покажите применения этого правила для вычисления производных обратных тригонометрических функций.

22. Сформулируйте теорему, отражающую правило дифференцирования сложной функции. На композицию какого числа функций распространяется правило вычисления производной сложной функции.

23. Что называется инвариантностью формы первого дифференциала.

24. Дайте сводку формул для производных элементарных функций.

25. Что называют логарифмической производной функции дифференцируемой в точке?

26. Приведите правило дифференцирования функции заданной параметрически.

27. Как можно дифференцировать функцию заданную неявно?

28. Что называют второй производной или производной второго порядка функции в точке и как ее обозначают?

29. Выведите формулу для второй производной функции заданной параметрически.

30. Как решается вопрос о вычислении второй производной сложной функции?

31. Как находят вторую производную неявной функции в простейших случаях? Поясните это на примере.

32. Каким образом определяется производная n-го порядка? Как ее обозначают?

33. Что называют вторым дифференциалом или дифференциалом второго порядка функции в точке и как его обозначают?

34. Как определяется n-й дифференциал $d^n y$? Откуда следует, что производная n-го порядка функции $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ равна отношению дифференциала n-

го порядка этой функции к n-й степени дифференциала независимого переменного т.е. $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$?

35. Дифференциал второго порядка, в отличии от первого дифференциала, не обладает свойством инвариантности формы. Разъясните, что это означает?

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoy M., Livernois J., McKenna Ch., Rees R., Stengos T. **Mathematics for Economics.** Second edition. The MIT Press: Cambridge, Massachusetts; London, England. 2001. - 1130 p. **(143 – 226)**

2. Бабаджанов Ш.Ш. **Высшая математика. Часть II.** Учебное пособие. Т.: «IQTISOD MOLIYA», 2015. – 420 с.

3. Малыхин В.И. **Высшая математика.** Учебное пособие. 2- е изд., перераб. и доп. М.: ИНФРА-М, 2009. - 365 с.